Verley

EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN

ONDER LEIDING VAN J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES

OFFICIEEL ORGAAN VAN LIWENAGEL EN VAN WIMECOS

17e JAARGANG 1941

Nr. 6

Prijs per Jaargang f 6.30*.
Voor intekenaars op het Nieuw
Tijdschrift v. Wiskunde f 5.25*.

P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN

Wegens papierschaarste moet volgens besluit van de Prov. en Per. Pers op alle tijdschriften 30 % worden bezuinigd.

Deze aflevering was in proef 3 vel; de geboden beperking van 30 % heeft tot de geringe omvang van 2 vel geleid.

Euclides, Tijdschrift voor de Didactiek der Exacte Vakken verschijnt in zes tweemaandelijkse afleveringen, samen 18 vel druks. Prijs per jaargang ƒ 6,—. Zij, die tevens op het Nieuw Tijdschrift (ƒ 6,—) zijn ingetekend, betalen ƒ 5,—.

De leden van Liwenagel (Leraren in wiskunde en natuurwetenschappen aan gymnasia en lycea) en Wimecos (Vereniging van leraren in de wiskunde, mechanica en de cosmographie aan H.B.S. 5-j. c. B, lycea en meisjes H.B.S. 5—6 j. c.) krijgen Euclides toegezonden als Officieel Orgaan van hun Verenigingen; de leden van Liwenagel storten de abonnementskosten ten bedrage van ƒ 1,75 op de postgirorekening no. 8100 van Dr. C. de Jong te Leiden. De leden van Wimecos storten hun contributie van ƒ 2,75 (waarin de abonnementskosten op Euclides begrepen zijn) op de postgirorekening no. 143917 ten name van de Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam. De abonnementskosten op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde moeten op postgirorekening no. 6593 van de Firma Noordhoff te Groningen voldaan worden onder bijvoeging, dat men lid is van Liwenagel of Wimecos. Deze bedragen ƒ 5,— per jaar franco per post.

Artikelen ter opneming te zenden aan J. H. Schogt, Amsterdam-Zuid, Frans van Mierisstraat 112; Tel. 28341.

Aan de schrijvers van artikelen worden op hun verzoek 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt.

Boeken ter bespreking en ter aankondiging te zenden aan P. Wijdenes, Amsterdam-Zuid, Jac. Obrechtstraat 88; Tel. 27119.

INHOUD.

II. *vervolgens, dat de diameter van de aarde grooter is dan de diameter van de maan en de diameter van de zon grooter dan de diameter van de aarde . . . .*

III. *vervolgens dat de diameter van de zon het dertigvoud is van den diameter van de maan en niet meer*[10]) . . . .

IV. *vervolgens, dat de diameter van de zon grooter is dan de zijde van den duizendhoek, beschreven in een grootsten cirkel van den kosmos* (een cirkel dus, waarvan de straal gelijk is aan den afstand van de aarde tot de zon) . . . .

4. Van de laatste onderstelling wordt nu eerst een wiskundig bewijs gegeven, dat gebaseerd is op een meting van den schijnbaren diameter δ van de zon. Archimedes zet uiteen, dat het moeilijk is, hiervoor een exact bedrag op te geven, *omdat noch het oog, noch de handen, noch de instrumenten, waarvan men gebruik moet maken, betrouwbaar zijn in het vinden van de juiste waarde*[11]). Hij zal echter kunnen volstaan met het aangeven van een bovenste en een benedenste grens, die verkregen zijn met behulp van het volgende toestel.

Over een horizontale, op verticalen voet geplaatste lat kan een kleine verticale cylinder verschoven worden. Men richt de lat op de zon, wanneer deze juist boven den horizon is[12]), plaatst het oog aan het eene uiteinde en verschuift nu den cylinder zoover naar de zon toe, dat deze juist rechts en links om den cylinder heen zichtbaar wordt. Was nu de oogpupil puntvormig, dan zou blijkbaar de hoek van de raaklijnen uit dit punt aan het grondvlak van den

---

Poseidonios: $2{,}4.10^5$ stadia; Ptolemaios: $1{,}8.10^5$ stadia. Archimedes overdrijft de aanname opzettelijk, om een zeker niet te kleine waarde voor de afmetingen van de spheer van de vaste sterren te vinden.

[10]) Hierbij worden andere aannamen omtrent deze verhouding geciteerd. Ze bedroeg volgens Eudoxos 9, volgens Pheidias (hier is de plaats, waarover gesproken wordt in Hoofdstuk I, § 1) 12, volgens Aristarchos meer dan 18 en minder dan 20. *Ik echter, ook dit overdrijvend, onderstel, dat de diameter van de zon het dertigvoud van den diameter van de maan is, opdat het gestelde ondubbelzinnig bewezen zal zijn.*

[11]) *Opera* II, 222; 1. 12—14.

[12]) De ouden deden hun zonnewaarnemingen bij voorkeur in den horizon, omdat ze geen middelen bezaten, het zonlicht te verzwakken.

cylinder getrokken, een benedenste grens voor δ zijn. De uitgebreidheid van de oogpupil stoort deze redeneering. Is nl. in fig. 149, geteekend in het horizontale vlak van de op het centrum der zon gerichte lineaal de cirkel C de cylinderbasis, zijn de raaklijnen,

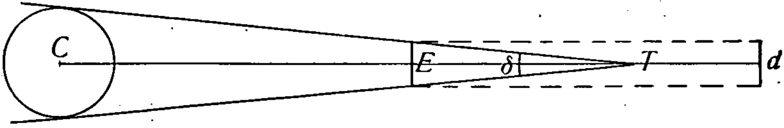


Fig. 149.

hieraan getrokken, stralen van de randen der zon en is T het snijpunt daarvan, dan kan een puntvormig oog tusschen C en T nooit zonlicht ontvangen, maar een oog, waarvan de pupildiameter d bedraagt, kan dit wel, wanneer zijn middelpunt maar gelegen is tusschen T en het punt E, waar de afstand d juist in den hoek der zonnestralen past; immers in dat geval is de doorsnede van de slagschaduw ter plaatse kleiner dan de oogpupil.

Men komt nu tot een onderste grens voor δ door op de plaats, waar het oog nog juist om den cylinder heen iets van de zon ziet, een horizontale cirkelvormige schijf te plaatsen, waarvan de diameter niet kleiner is dan de diameter d van de oogpupil en nu den hoek φ te meten, dien de uitwendig gemeenschappelijke raaklijnen van deze schijf en den cirkel C met elkaar maken [13]).

Om een bovenste grens voor δ te vinden, bepaalt Archimedes den stand, waarin het oog niets meer ziet. Dit geschiedt tusschen C en E. De raaklijnen uit zulk een punt aan den cirkel C getrokken, vormen een hoek ψ, die grooter is dan δ en die des te dichter van δ verschilt, naarmate het bedoelde punt verder van C af kan worden genomen. Men zou hier natuurlijk de bovenste grens kunnen verlagen door den hoek te bepalen van de gemeenschappelijke raaklijnen van C en de bovengenoemde schijf. Archimedes laat dit na, waarschijnlijk omdat de onnauwkeurigheid, die hier begaan wordt door den hoek der uit een punt aan cirkel C getrokken raaklijnen te meten, nooit tot een waarde van den verkeerden kant van δ kan

---

[13]) Eigenlijk moest men dus den hoek meten, dien de raaklijnen aan den cirkel C uit de uiteinden van de middellijn der schijf loodrecht op CT met elkaar maken. Dit maakt echter een zoo klein verschil, dat er geen rekening mee behoefde te worden gehouden.

voeren, wat bij de bepaling van φ op analoge wijze wel zou kunnen gebeuren [14]).

Wanneer R den rechten hoek voorstelt, is het gevonden resultaat als volgt weer te geven:

$$\varphi > \frac{R}{200} \qquad \psi < \frac{R}{164}$$

dus a fortiori

$$\frac{R}{200} < \delta < \frac{R}{164}$$

Dit beduidt in andere notatie

$$27' < \delta < 32'56''$$ [15])

5. Thans kan bewezen worden, dat de diameter van de zon

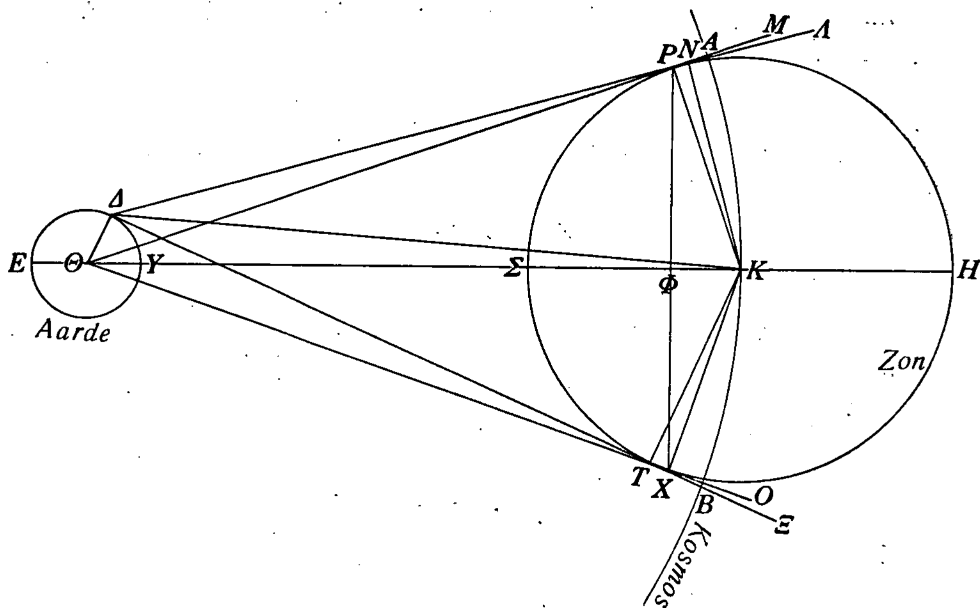


Fig. 150. *)

grooter is dan de zijde van den regelmatigen duizendhoek, beschreven in een grootsten cirkel van den kosmos [16]).

*) In de figuur is de lijn PX getrokken; dit moet zijn AB.

[14]) Het verschil in de bepalingswijzen van φ, en ψ wordt uitgedrukt, doordat Archimedes ψ betitelt als γωνία ἐν στίγῳ (hoek in een punt).

[15]) Zooals bekend is, ligt δ in werkelijkheid tusschen 31′28″ en 32′32″.

[16]) Wanneer Archimedes had durven aannemen, dat de raakkegel uit het oog aan de zon gebracht, deze raakt volgens een

In fig. 150 is het vlak van teekening het vlak door het oog van den waarnemer, Δ, en de middelpunten Θ, K van aarde en zon. De kosmos wordt gesneden volgens een cirkel door K met centrum Θ. $\Delta\Xi$, door Δ, in T aan de zon rakend, is de doorsnede van het vlak van teekening met den horizon van Δ. Verder is uit Δ de raaklijn $\Delta\Lambda$ aan de zon getrokken; het raakpunt is N. Uit Θ gaan ook twee raaklijnen aan de zon, ΘO met raakpunt X en snijpunt met den kosmos B, ΘM met raakpunt P en snijpunt met den kosmos A. De centraal ΘK snijdt de aarde in E en Y, de zon in Σ en H, de lijn AB in Φ *).

Omdat de zon boven den horizon staat en $\angle\, \Theta\Delta O$ recht is, is $\angle\, \Theta\Delta K$ stomp, dus $\Theta K > \Delta K$. Dus is de schijnbare middellijn van de zon voor Θ, d.i. $\angle M\Theta O$, kleiner dan die voor Δ, d.i. $\angle \Lambda\Delta\Xi$.

Nu is bekend

$$\frac{R}{200} < \angle\, \Lambda\Delta\,\Xi < \frac{R}{164}$$

dus is zeker

$$\angle\, M\Theta O < \frac{R}{164}$$

dus is AB kleiner dan de koorde, die $\frac{1}{656}$ deel van den cirkel AKB onderspant. Daar de omtrek van den regelmatigen 656-hoek tot den straal ϱ van den kosmos een verhouding heeft, die kleiner is dan 44 : 7 (immers de verhouding van den cirkelomtrek tot den straal is reeds kleiner dan deze), geldt dus

$$(AB,\ \varrho) < \frac{1}{656} \cdot \frac{44}{7} = \frac{11}{1148} < \frac{1}{100}$$

dus

$$AB < \frac{1}{100}\,\varrho.$$

Nu is AB gelijk aan den diameter d van de zon (wegens $\triangle\, \Theta KX \cong \triangle\, \Theta B\Phi$ is $B\Phi = KX = \frac{1}{2}d$), dus

$$d < \frac{1}{100}\,\varrho.$$

---

grooten cirkel en hij tevens de parallax had durven verwaarloozen, zou deze stelling een onmiddellijk gevolg zijn van de overweging, dat de boog onderspannen door een koorde van een regelmatigen duizendhoek $\frac{R}{250}$ bedraagt, dus zeker $< \delta$ is.

*) In fig. 150 is de lijn PX te vervangen door AB.

Nu is de aarddiameter $EY < d$, dus

$$\Theta Y + K\Sigma < \frac{1}{100}\Theta K \quad \text{of} \quad Y\Sigma > \frac{99}{100}\Theta K$$

dus

$$(\Theta K,\ Y\Sigma) < (100,\ 99)$$

Nu is $\Theta K > \Theta P$, maar $Y\Sigma < \Delta T$ (omdat $Y\Sigma$ de kortste afstand is van een punt van de aarde tot een punt van de zon).

Dus is a fortiori

$$(\Theta P,\ \Delta T) < (100,\ 99)$$

Vergelijken we nu de driehoeken ΘKP en ΔKT, die beide rechthoekig zijn en waarin $KP = KT$, $\Theta P > \Delta T$ (wegens $\Theta K > \Delta K$), dan is op grond van een in de Grieksche wiskunde zeer gebruikelijk lemma [17])

$$(\angle K\Delta T,\ \angle K\Theta P) < (\Theta P,\ \Delta T) < (100,\ 99)$$

Dus is ook

$$(\angle \Lambda\Delta\Xi,\ \angle M\Theta O) < (100,\ 99)$$

Daar nu $\angle \Lambda\Delta\Xi > \frac{R}{200}$ vinden we

$$\angle M\Theta O > \frac{99}{100} \cdot \frac{R}{200}$$

en daar

$$\frac{99}{20000} < \frac{1}{203}:$$

$$\angle M\Theta O > \frac{R}{203}$$

AB is dus zeker grooter dan de zijde van den regelmatigen 812-hoek [18]), dus a fortiori grooter dan de zijde van den regelmatigen duizendhoek, in de kosmosdoorsnede beschreven.

---

[17]) Dit lemma drukt, modern geformuleerd, uit dat voor $\frac{\pi}{2} > \alpha > \beta$

$$\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}$$

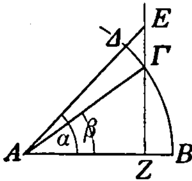


Fig. 151.

Het bewijs is als volgt te leveren: Zij in fig. 151 $\angle \Delta AB = \alpha$, $\angle \Gamma AB = \beta$. Dan is $(\angle \Delta A\Gamma,\ \angle \Gamma AB) =$ (sector $\Delta A\Gamma$, sector ΓAB) $< (\triangle EA\Gamma,\ \triangle \Gamma AZ)$ dus $(\angle \Delta AB,\ \angle \Gamma AB) < (\triangle EAZ,\ \triangle \Gamma AZ) = (EZ,\ \Gamma Z)$.

[18]) Het resultaat van de geheele moeizame herleiding, die neerkomt op een correctie voor dagelijksche parallax, bestaat dus in de vervanging van de benedenste grens $\frac{R}{200}$ voor δ, gemeten uit Δ, door $\frac{R}{203}$ voor δ, gemeten uit Θ.

6. De diameters van maan, aarde, zon en kosmos voorstellend door D met index, weten we nu

$$D_{zon} = 30\, D_{maan} < 30\, D_{aarde}$$

Daar verder de omtrek van den kosmischen duizendhoek grooter is dan 3 D_{kosmos} (immers de omtrek van den regelmatigen zeshoek bedraagt reeds 3 D) en tevens wegens § 5 kleiner dan 1000 D_{zon} geldt ook

$$3D_{kosmos} < 1000\; D_{zon} < 30.000\; D_{aarde}$$

en daar de omtrek van de aarde 3.10^6 stadia bedraagt en haar diameter dus minder dan 10^6 stadia

$$3D_{kosmos} < 10^{10} \text{ stadia}$$ [19])

7. Er moeten nu onderstellingen over de grootte van de zandkorrels worden gemaakt. Deze moeten uit den aard der zaak overdreven worden naar den kleinen kant, om het bewijs van de mogelijkheid van uitdrukking van groote getallen te versterken. Ondersteld wordt, dat een volume, niet grooter dan een papaverzaadje, niet meer dan een myriade korrels bevat, terwijl de diameter van zulk een zaadje niet kleiner is dan $\frac{1}{40}$ vingerbreedte. De laatste grens berust op een meting: 25 zaadjes vulden, naast elkaar gelegd, meer dan een vingerbreedte. De diameter is dus grooter dan $\frac{1}{25}$ vingerbreedte. De grens $\frac{1}{40}$ is dus naar den kleinen kant overdreven.

8. Voordat nu de berekening kan beginnen, moet het nieuwe systeem voor het weergeven van groote getallen worden uiteengezet.

Bekend zijn de namen der getallen van één tot tienduizend en door opgave van het aantal tuinduizenden kan men zonder bezwaar tot tienduizend tienduizenden (*μύριαι μυριάδες*, 10^8) komen. De zoo verkregen getallen heeten *eerste getallen* (*πρώτοι ἀριθμοὶ* [20]). Men neemt nu 10^8 als nieuwe eenheid en vormt met behulp van deze eenheid (en de oorspronkelijke) de *tweede getallen*, d.w.z. de getallen tot en met tienduizend tienduizenden van de nieuwe een-

[19]) We geven dit resultaat ter wille van de overzichtelijkheid in modern cijferschrift. In het Grieksch staat er *ά τοῦ κόσμου διάμετρος ἐλάττων ἐστὶν ἢ σταδίων μυριάκις μυριάδες* $\bar{\varrho}$ (minder dan tienduizend maal honderd tienduizenden stadia).

[20]) Dezelfde naam, die anders priemgetallen aanduidt.

heid (dus 10^{16}). Zoo voortgaande krijgt men de *derde getallen* (tot 10^{24}) enz. Men doet dit tienduizend tienduizenden malen en komt zoo tot een getal (A), dat tienduizend tienduizenden van de tienduizend-maal-tienduizendste getallen bedraagt ($A = 10^{8.10^8}$). Hoewel men aan de tot dusver benoemde getallen voor alle practische doeleinden al meer dan genoeg heeft, breidt Archimedes het systeem nog verder uit.

De getallen van 1 tot A vormen de *eerste periode*. A wordt nu eenheid van de *tweede periode*, die evenals de eerste haar eerste, tweede enz. getallen heeft en die dus tot het getal A^2 leidt. Dit is dan een eenheid van de *derde periode*. Dit proces wordt voortgezet totdat er tienduizend tienduizenden perioden zijn verkregen. Het laatste benoemde getal heet in het Grieksch

μυριακισμυριοστᾶς περιόδου μυριακισμυριοστῶν ἀριθμῶν μύριαι μυριάδες.

d.i. letterlijk

tienduizend tienduizenden tienduizend-maal-tienduizendste getallen van de tienduizend-maal-tienduizendste periode.

Het bedraagt

$$A^{10^8} = 10^{8.10^{16}}$$

9. Om de uitdrukkingswijze der in de berekening optredende getallen, die alle veelvouden zijn van machten van tien, nog wat te vereenvoudigen, beschouwt Archimedes nu de rij der opvolgende machten van 10 met niet-negatieve geheele exponenten, die hij indeelt in groepen van acht, de octaden:

$$\underbrace{1,\ 10,\ 10^2\ .\ .\ .\ .\ 10^7}_{1^e\ octade},\ \underbrace{10^8\ .\ .\ .\ .\ 10^{15}}_{2^e\ octade},\ \underbrace{10^{16}\ .\ .\ .\ .\ 10^{23}}_{3^e\ octade}\ \text{enz.}$$

Men ziet gemakkelijk, dat de eerste octade uitsluitend eerste getallen bevat, de tweede octade uitsluitend tweede getallen enz. Als eenheden der opvolgende octaden worden betiteld de getallen 1, 10^8, 10^{16} enz.

Bovendien geeft Archimedes nu een vermenigvuldigingsregel aan voor getallen van een meetkundige reeks met 1 tot eersten term:

Wanneer van getallen, die vanaf de eenheid evenredig zijn, er sommige elkaar vermenigvuldigen [21]), *zal het product in dezelfde rij*

---

[21]) Zoo is eigenlijk de term, dien wij tot „met elkaar vermenigvuldigen" verbasterd hebben.

voorkomen, op een plaats, die zoòver van het grootste der getallen, die elkaar vermenigvuldigd hebben, afligt als het kleinste van de eenheid verwijderd is en het zal van de eenheid één plaats minder afliggen dan de som der getallen, die aangeven, hoever de getallen, die elkaar vermenigvuldigd hebben, van de eenheid verwijderd zijn.

Deze regel stelt dus b.v. in staat, om in de meetkundige reeks

$$A, B, \Gamma, \Delta, E, Z, H, \Theta, I, K, \Lambda \quad \text{waarin } A = 1$$

voor het product $\Delta . \Theta$ onmiddellijk Λ te vinden, omdat Λ evenver van Θ afligt als Δ van A. Ze spreekt verder uit, dat men het rangnummer van Λ vindt door de som der rangnummers van Δ en Θ met 1 te verminderen.

In moderne symboliek beduidt het eerste deel van den meegedeelden regel niets anders dan de eigenschap

$$a^m . a^n = a^{m+n}$$

terwijl het tweede deel zegt, dat in de meetkundige reeks

$$t_1 = 1, t_2, t_3 \dots.$$

het product van t_i en t_j de term t_{i+j-1} is.

10. Na al deze voorbereidingen kan thans de berekening beginnen; zij verloopt natuurlijk geheel in woorden en beslaat daardoor vele bladzijden. We zullen haar, voorzoover ze hier meegedeeld wordt, ook in woorden weergeven.

Een bol met een diameter van een vingerbreedte bevat niet meer dan vierenzestigduizend zaadjes (40^3), dus niet meer zandkorrels dan zes eenheden van de tweede octade met nog vierduizend myriaden, in ieder geval dus minder dan tien eenheden van de tweede octade. Een bol met een diameter van honderd vingerbreedten bevat dus minder dan honderd myriaden maal tien eenheden der tweede octade, dus minder dan het product van het zevende en het tiende getal der bovenstaande rij van de opvolgende machten van tien; dit product is het zestiende getal der rij of duizend myriaden eenheden der tweede octade. Een bol met een diameter van tienduizend vingerbreedten, d.i. een stadium, bevat weer duizend myriaden maal zooveel, dus minder dan het twee-en-twintigste getal der rij (10^{21}). Zoo voortgaande vindt men bovenste grenzen voor de aantallen zandkorrels in bollen, welker diameters telkens honderd

EUCLIDES

TIJDSCHRIFT VOOR DE DIDACTIEK DER EXACTE VAKKEN

ONDER LEIDING VAN J. H. SCHOGT EN P. WIJDENES

OFFICIEEL ORGAAN VAN LIWENAGEL EN VAN WIMECOS

17e JAARGANG 1940/41

P. NOORDHOFF N.V. — GRONINGEN

INHOUD VAN DE 17e JAARGANG 1940/41.

maal zoo groot zijn als die van den voorafgaanden; de rangnummers in de rij van machten van tien verspringen daarbij telkens zes eenheden. Voor een bol met een diameter van tienmaalhonderdduizend myriaden stadia komt men zoo op het twee-en-vijftigste getal, dat duizend myriaden eenheden van de zevende octade bedraagt.

In moderne notatie vindt men onmiddellijk voor het aantal zandkorrels in den laatstgenoemden bol, die een diameter van 10^{10} stadia heeft, de grens

$$(10^{10})^3 \cdot 10^{21} = 10^{51}.$$

Het laatst verkregen getal is dus een bovenste grens voor het aantal korrels in den kosmos. Daar nu krachtens onderstelling [22]) de diameter van de sterrenspheer minder dan een myriade kosmosdiameters bedraagt, vindt men, dat het aantal zandkorrels in de sterrenspheer minder bedraagt dan duizend myriaden eenheden der achtste octade (d.i. 10^{63}).

Archimedes slaagt er dus in dit getal te benoemen zonder zelfs de eerste periode geheel noodig te hebben. Hij beeindigt de uiteenzetting daarna met deze woorden:

Ik vermoed, koning Geloon, dat deze dingen aan de velen, die geen gemeenschap met de mathesis hebben, ongeloofelijk zullen schijnen; maar voor hen, die er wel mee vertrouwd zijn en die over de afstanden en de grootten van de aarde, de zon en de maan en van den geheelen kosmos hebben nagedacht, zullen ze geloofwaardig zijn door het bewijs. Daarom heb ik gemeend, dat het ook u niet onwelgevallig zou zijn, deze dingen te overwegen.

---

[22]) Volgens door Archimedes voorgestelde interpretatie van de schatting van Aristarchos is immers de verhouding van de (diameters van) sterrenspheer en kosmos dezelfde als die van (de diameters van) kosmos en aarde, welke laatste verhouding in § 6 kleiner bleek te zijn dan 10.000.

D. J. KORTEWEG †

Zestig jaren lang is Korteweg's naam op de Series Lectionum der Amsterdamsche Universiteit voorgekomen. Even lang op de ledenlijst der Akademie van Wetenschappen, vijf en zeventig jaren op die van het Wiskundig Genootschap. Als laatste overlevende uit de heroïsche periode der Amsterdamsche natuurphilosophische faculteit, waarin deze door eenige bijna verblindende in het duistere labyrinth der natuurlijke wetmatigheden geworpen zoeklichten de wereld verbaasde, was Korteweg op het einde van zijn leven een haast legendarische figuur geworden. En met recht, want dat tijdperk, waaruit hij was overgebleven, heeft ten duidelijkste ook zijn stempel gedragen. Wanneer wel eens de vraag wordt gesteld, hoe de natuurwetenschap er thans zou uitzien, indien gedurende de laatste decenniën der vorige eeuw er geen Amsterdamsche faculteit der Wis- en Natuurkunde ware geweest, dan kan daaraan onmiddellijk de vraag worden toegevoegd, in hoeverre toentertijd in Nederland zóó volledige en zóó vruchtbare resultaten hadden kunnen worden bereikt, indien daarbij Korteweg niet zijn machtige hulp had verleend.

Dat zijn uitzonderlijke mathematische intelligentie in zoo ruime mate in dienst der natuurwetenschap werd gesteld, had een tweeledige persoonlijke oorzaak: ten eerste was zijn psychische aandacht dermate naar buiten gekeerd, dat het belang der wiskunde voor hem uitsluitend in haar practisch gebruik was gelegen; ten tweede werd hij door zijn karakter gedreven, om steeds dat werk te verrichten, dat naar zijn meening gedaan moest worden, en door hem beter dan door iemand anders gedaan kon worden. Zulk werk werd door hem ook dan gekozen, wanneer het in stilte moest worden volbracht, want ieder verlangen, persoonlijk op den voorgrond te treden, was hem vreemd. Aldus bracht zijn natuur mede, niet alleen dat hij wiskundige theorieën opbouwde, die het natuurwetenschappelijk onderzoek in zijn omgeving konden bevorderen, maar ook dat hij bereid werd gevonden, een groot deel van zijn tijd in dienst te stellen van niet direct wetenschappelijk investigeerende ondernemingen, als de uitgave van Huygens' werken en die van den Internationalen Catalogus van Wetenschappelijke Litteratuur.

Waarbij gezegd moet worden, dat hij als aanleiding tot arbeiden deze dienstvaardigheid allerminst van noode had, want zijn belangstelling en eruditie strekten zich uit over een verbazingwekkend ruim wetenschappelijk gebied, waar zijn denken snel en scherp reageerde op alles wat hij hoorde of las. Sinds 1871 heeft hij geschreven over algebra en meetkunde, oscillatie- en storingstheorie, electriciteits- en geluidsleer, kinetische gastheorie, hydrodynamica, astronomie, waarschijnlijkheidsrekening en verzekeringswetenschap, geschiedenis der wis- en natuurkundige wetenschappen.

Toch zullen in dezen overvloed, ook van zuiver wiskundig standpunt, waarschijnlijk die werken op den duur zijn schoonste blijken, die in het boven geschetste dienende verband zijn ontstaan: zijn theorie der plooiïng van oppervlakken, die een belangrijk deel der thermodynamica draagt; zijn waarschijnlijk met het oog op de spectraalanalyse ontworpen theorie der relatietrillingen; en zijn ontraadseling van het mysterie van Huygens' sympathische uurwerken, die, in elkaars nabijheid geplaatst, elkaar tot stilstand trachten te brengen en tevens nauwkeurig gelijk gaan loopen.

Het spreekt van zelf dat een man als Korteweg een machtigen invloed uitoefende op zijn leerlingen, voor wie hij even veeleischend als toegankelijk was, met wie hij gaarne in discussie trad, en die van hem erkenning en aanmoedigende belangstelling ondervonden, ook ten aanzien van studierichtingen, die de zijne niet waren, zoodat zeker niet minder dissertaties over zuivere, dan over toegepaste wiskunde onder zijn leiding zijn bewerkt.

In verband met zijn naar buiten gekeerde aandacht viel het hem in de laatste jaren van zijn lang leven niet gemakkelijk, eerst van de mogelijkheid tot eigen scheppend werk, en vervolgens ook van het vermogen tot kritische kennisneming van wetenschappelijke actualiteiten de geleidelijke verdwijning te moeten aanvaarden. Doch daartegenover heeft het hem ongetwijfeld gesterkt en verblijd, dat hij niet bij zijn leven is vergeten: tot het laatste toe gewerden hem regelmatig en rijkelijk teekenen van eerbiedige belangstelling zijner leerlingen uit alle perioden, en het is veelzeggend, dat van het Wiskundig Genootschap gedurende de honderddrieënzestig jaren van zijn bestaan Korteweg het eenige eerelid is geweest.

L. E. J. BROUWER.

(gesproken bij Korteweg's uitvaart op 13 Mei 1941).

LVIII. EEN ANDER TALSTELSEL.

Een bijzonder mooie toepassing van een ander getalstelsel dan het tientallige, is te vinden in een boek van *Dr. Em. Lasker* „Brettspiele der Völker". Daar dit wel aan slechts weinigen bekend zal zijn, en het aantal toepassingen van verschillende getalstelsel wel uiterst klein zal zijn — een werkelijke toepassing zag ik eigenlijk nog nooit — geef ik hier het bedoelde stuk weer.

We stellen ons voor, dat twee spelers het volgende spel spelen: er liggen 3 hoopjes lucifers op tafel van willekeurige aantallen. Om de beurt neemt een speler een aantal van één hoopje weg. Dit aantal mag willekeurig zijn, ook de hele stapel mag weggenomen worden. *Wie kans ziet de laatste (of laatsten) weg te nemen heeft gewonnen.*

Laten we een stand, waarin de aan zet zijnde speler moet verliezen een *verliesstand* (V-stand) noemen, dan is het duidelijk dat o.a. de stand 0, a, a, (a willekeurig) V-standen zijn. Daarentegen is 1, 1, 2 een winststand (W-stand), want hiervan maakt men 1, 1, 0, wat een V-stand is. Door proberen kan men gemakkelijk een aantal V-standen vinden:

0, a, a.	1, 2, 3	2, 4, 6	3, 4, 7
	1, 4, 5	2, 5, 7	3, 5, 6
	1, 6, 7	2, 8, 10	3, 8, 11
	1, 8, 9,	2, 9, 11	3, 9, 10.

Men zal toegeven, dat deze lijst, behalve de eerste twee kolommen, er verward uit ziet, en dat het haast uitgesloten schijnt een algemene regel voor V-standen op te stellen. Het verrassende is nu, dat dit met behulp van het 2-tallig stelsel gelukt:

Schrijft men de 3 getallen in het 2-tallig stelsel onder elkaar, alsof men ze wilde optellen, dan is de beschouwde stand een V-stand, als in iedere kolom een even aantal cijfers 1 staan; anders is het een W-stand.

Een V-stand is dus 13, 23, 26:

```
  1 1 0 1
1 0 1 1 1
1 1 0 1 0
```

Een W-stand is 13, 23, 24:

1 1 0 1
1 0 1 1 1
1 1 0 0 0.

Bewijs: Dit volgt uit de volgende drie regels:

a) 0, 0, 0 is een V-stand.

b) Welke zet men in een V-stand ook doet, deze gaat altijd over in een W-stand.

c) Door juist spelen kan men een W-stand veranderen in een V-stand.

a) Is triviaal.

b) Door iedere verandering in een getal zal minstens één 0 in 1, of één 1 in 0 veranderen, waardoor in de bijbehorende kolom het aantal cijfers 1 niet even kan blijven. (Merk op dat hierbij niet eens gebruikt wordt, dat het getal *verminderd* wordt).

c) In het 2de genoemde voorbeeld kan dit gebeuren door van het tweede getal te maken 10101, dus door 2 lucifers weg te nemen. In het geval

1 1 1 1 0
1 1 0 0 1
1 1 0 0

maakt men van 11110 het getal 10101.

Algemeen: door te kijken naar de meest links gelegen kolom waarin iets veranderd moet worden en dan één van de getallen uit te kiezen welke in die kolom een 1 hebben, waarna men dit getal kan verminderen met het juiste bedrag.

Enige wijzigingen in de spelregels kan men gemakkelijk zelf aanbrengen: zo zal, als men van meer dan 3 hoopjes uit gaat de bovengenoemde eigenschap door blijven gaan.

Verder: als men van een even aantal hoopjes uitgaat en inplaats van lucifers *wegnemen,* het spel verandert in *bijvoegen* van een stapeltje totdat een vastgestelde V-stand is bereikt, dan zal de regel evenzeer doorgaan.

J. DEKNATEL.

LIX. NAAR AANLEIDING VAN KORREL LV.

De berekening, die Dr. H. J. E. Beth in de vorige nummers van Euclides geeft omtrent „De eenparige cirkelbeweging", verloopt m.i. iets eenvoudiger, door van het bewegende punt de potentiële energie P te bepalen. Daarbij is dan rekening te houden ook met de potentiële energie van de schijnkracht $my\omega^2$.

Kiezen we de x-as langs de omwentelingsas, positief naar boven, en de oorsprong in het laagste punt der kromme, dan is:

$$P = mgx - \tfrac{1}{2}\, my^2\omega^2,$$

indien voor de zwaartekracht het vlak $x = 0$ als nulvlak wordt genomen en de P van de schijnkracht t.o. van de draaiingsas.

Voor (hier beweeglijk) evenwicht, moet dan:

$$\frac{dP}{dx} = mg - myy'\omega^2 = 0$$

of:

$$yy' = \frac{g}{\omega^2}.$$

Verder is: $\dfrac{d^2P}{dx^2} = -\, m\omega^2\, (y'^2 + yy'')$.

Nemen we nu dezelfde drie gevallen als de heer B.

I. Een rechte, die de omwentelingsas snijdt: $y = \mu x$, dan is $y' = \mu$ en dus is er evenwicht voor:

$$y = \frac{g}{\mu\omega^2}.$$

Ook is $y'' = 0$ en dus $\dfrac{d^2P}{dx^2} = -\, m\omega^2\mu^2$, zodat P maximaal is. Het evenwicht is dus *labiel.*

II. Een parabool met symmetrieas langs de draaiingsas: $y^2 = 2px$ Dan is: $yy' = p$, zodat er evenwicht is als:

$$p = \frac{g}{\omega^2} \text{ of } \omega = \sqrt{\frac{g}{p}},$$

onafhankelijk van de plaats van het bewegende punt.

In dit geval is:
$$\begin{aligned} P &= mgx - \tfrac{1}{2}\, my^2\omega^2 \\ &= mgx - \tfrac{1}{2}\, m(2px)\, \frac{g}{p} \\ &= 0, \end{aligned}$$

voor elk punt der draaiende buis. Er is dus *indifferent* evenwicht.

III. Een cirkel: $(r - x)^2 + y^2 = r^2$.

Nu is:
$$yy' = r - x$$
en dus:
$$\frac{dP}{dx} = mg - m\omega^2 (r - x),$$
zodat er evenwicht is als $r - x = \frac{g}{\omega^2}$.

Nog eens differentiëren geeft:
$$y'^2 + yy'' = - 1.$$
en dus:
$$\frac{d^2P}{dx^2} = - m\omega^2 (y'^2 + yy'') = m\omega^2.$$
zodat P minimaal is en het evenwicht dus *stabiel*.

Voeren we in dit laatste geval als coordinaat de hoek in, die de straal naar het bewegende punt maakt met de (negatieve) x-as, dan is:
$$x = r (1 - \cos \varphi), \quad y = r \sin \varphi.$$
waaruit:
$$y' = \operatorname{cotg} \varphi$$
en dus: $\quad yy' = r \cos \varphi$ en ook $yy'' + y'^2 = - 1,$

zodat er relatief evenwicht is, als:
$$\cos \varphi = \frac{g}{r\omega^2}; \text{ dus } \varphi < \frac{\pi}{2}.$$
en:
$$\frac{d^2P}{dx^2} = - m\omega^2 (- 1) = m\omega^2.$$

W. J. VOLLEWENS.

LX.

DE BEREKENING VAN DE OPPERVLAKTE VAN DELEN VAN HET BOLVLAK.

Voor ons is slechts van twee delen van het bolvlak de oppervlakte van belang: van de driehoek en van het kapje. Ik vind in de verschillende leerboeken steeds de behandeling van deze twee onderwerpen gescheiden. Men begint met de berekening van de oppervlakte van de boltweehoek; hierbij maakt men er alleen van gebruik, dat congruente delen van het bolvlak gelijke oppervlakte hebben. Daar de oppervlakte van het bolvlak op dat ogenblik nog niet gedefinieerd is, kan men niet verder komen dan tot vaststelling van de

verhouding van de oppervlakte van de boltweehoek, en daarna ook van de boldriehoek, tot het gehele bolvlak. Voor ons doel is dit toereikend, omdat daarmee in het licht gesteld is een kenmerkend verschilpunt tussen de meetkunde op het bolvlak en de vlakke meetkunde: de som van de hoeken van een boldriehoek is niet constant, doch het exces is evenredig met de oppervlakte.

Dan begint men opnieuw: men laat een cirkelboog wentelen om een middellijn van de cirkel (de middellijn mag de boog niet verdelen) en definieert de grootte van de beschreven oppervlakte als de limiet van de oppervlakte, die beschreven wordt door een in die boog beschreven regelmatig gebroken lijn, als men het aantal lijnstukken van de gebroken lijn onbepaald laat toenemen. Hiermede komt men ook tot de oppervlakte van het gehele bolvlak, en daarna ook tot de absolute grootte van de oppervlakte van de boldriehoek.

Deze methode is alleszins voldoende, maar er is een andere methode, die me fraaier lijkt, omdat de behandeling daarbij geheel parallel loopt met de in de planimetrie gevolgde [1]). Bovendien is ze in verschillende opzichten leerzaam.

Om tot de oppervlakte van het bolkapje te komen, sluit ik aan bij de stelling, dat de oppervlakte van een boldriehoek evenredig is met het exces van zijn hoekensom, en ik bewijs, dat de oppervlakte van een bolkapje (ik denk gemakshalve aan een kapje, dat kleiner is dan het halve bolvlak) de limiet is van de oppervlakte van een regelmatige veelhoek, die men er in beschrijft, als men het aantal zijden onbepaald laat toenemen.

[1]) Nadat ik dit stukje geschreven had, bleek mij, dat de door mij bedoelde berekening reeds onder de hogere nummers van het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde was gegeven; zie Jg. XXVIII no. 3085.

In de figuur is ABC, zie rechts op de figuur, een middelpuntsdriehoek van de regelmatige bol n-hoek, P het midden van de boog AB van een grote cirkel. Noemen we δ de hoek tussen de bogen APB en ADP opv. van de grote en de kleine cirkel, dan is het exces van de som der hoeken van de driehoek ABC gelijk aan

$$\frac{2\pi}{n} + 2\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) - \pi = \frac{2\pi}{n} - 2\delta.$$

Dus is het exces van de n-hoek gelijk aan $2\pi - 2n\delta$.

We hebben dus te onderzoeken, of $n\delta$ voor $n \to \infty$ een limiet heeft en hoe groot deze is. In de boldriehoek APC is $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) = \frac{\operatorname{tg} AP}{\operatorname{tg}\alpha}$, waarin α de hoek AMC voorstelt; dus $\sin\delta = \frac{\operatorname{tg} AP}{\operatorname{tg}\alpha}$.

Verder is

$$\lim_{n\to\infty} n\delta = \lim_{n\to\infty} n\delta \lim_{\delta\to 0} \frac{\sin\delta}{\delta} = \lim_{n\to\infty} n\sin\delta = \lim_{n\to\infty} \frac{n \operatorname{tg} AP}{\operatorname{tg}\alpha} =$$

$$= \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} \lim_{n\to\infty} n \operatorname{tg} AP = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} \lim_{n\to\infty} n \operatorname{tg} AP . \lim_{AP\to 0} \frac{\frown AP}{\operatorname{tg} AP} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} \lim_{n\to\infty} n . \frown AP.$$

Hierin stelt $\frown$ AP de boog AP voor, in radialen uitgedrukt. Is R de straal van het bolvlak, en drukken we $\frown$ AP in lengte-eenheden uit, dan wordt

$$\lim_{n\to\infty} n\delta = \frac{1}{R \operatorname{tg}\alpha} . \lim_{n\to\infty} n . \frown AP.$$

Nu stelt $\lim\limits_{n\to\infty} n \frown AB$, waarin $\frown$ AB de grootcirkelboog is, in lengte-eenheden uitgedrukt, de omtrek voor van de cirkel, die AE als straal heeft.

Dus is

$$\lim_{n\to\infty} n\delta = \frac{1}{R\operatorname{tg}\alpha} . \tfrac{1}{2} 2\pi . AE = \frac{1}{R\operatorname{tg}\alpha} . \pi R \sin\alpha = \pi \cos\alpha.$$

De oppervlakte van de ingeschreven n-hoek heeft dus een limiet en deze is gelijk aan

$$\frac{2\pi - 2\pi\cos\alpha}{4\pi} \times O = \tfrac{1}{2}(1 - \cos\alpha)\, O\,,$$

waarin O de oppervlakte van het gehele bolvlak voorstelt.

Wil men de formule van de rechthoekige boldriehoek niet gebruiken, dan kan men in de rechtlijnige driehoek PAD eerst $\sin \angle$ PAD berekenen, enz.

Beschrijft men nu ook *om* de kleine cirkel een regelmatige n-hoek, dan kan men opnieuw de limiet onderzoeken voor $n \to \infty$. Zij $\angle A'G'C = \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ (zie links op de figuur), dan is het exces van de som der hoeken van een van de middelpunts-driehoeken gelijk aan

$$\frac{2\pi}{n} + 2\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) - \pi = \frac{2\pi}{n} - 2\varepsilon.$$

Dus is het exces van de n-hoek gelijk aan $2\pi - 2n\varepsilon$.

In de boldriehoek A'G'C is nu

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) = \frac{\operatorname{tg} A'C'}{\sin A'G'}, \text{ dus } \operatorname{tg} \varepsilon = \frac{\sin AG}{\operatorname{tg} \alpha}.$$

We vinden ook hier

$$\lim_{n \to \infty} n\varepsilon = \pi \cos \alpha;$$

Ook de oppervlakte van de omgeschreven regelmatige n-hoek heeft voor $n \to \infty$ een limiet in deze is weer gelijk aan

$$\tfrac{1}{2}(1 - \cos \alpha)\, O.$$

Hiermede is de oppervlakte van het bolkapje gevonden, wederom echter slechts in delen van het gehele bolvlak; dit kon niet anders, omdat we nog steeds niets anders gebruikt hebben dan dat congruente delen van het bolvlak even grote oppervlakte hebben.

We gaan nu over tot de eigenlijke definitie van de oppervlakte van de bol en stellen daartoe vast, dat de limiet van de verhouding van de gebogen en de vlakke begrenzing van een bolsegment voor $\alpha \to 0$ gelijk aan de eenheid is. Dus

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\frac{1}{2}(1 - \cos \alpha)\, O}{\pi R^2 \sin^2 \alpha} = 1.$$

of:

$$O = 2\pi R^2 \lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin^2 \alpha}{1 - \cos \alpha} = 2\pi R^2 \lim_{\alpha \to 0} (1 + \cos \alpha) = 4\pi R^2.$$

Hierdoor wordt de oppervlakte van het bolkapje gegeven door

$$2\pi R^2(1 - \cos \alpha) = 2\pi R h,$$

waarin h de pijl voorstelt.

H. J. E. BETH.

UIT HET VERSLAG VAN DE STAATSCOMMISSIE 1940.

De subcommissie voor de *wiskunde* meent allereerst de aanstaande candidaten te moeten wijzen op de in vorige verslagen gemaakte opmerkingen, waarvan de meeste nog steeds van kracht zijn.

Wat de behaalde cijfers aangaat, vergelijke men de gemiddelde cijfers over de jaren 1938, 1939 en 1940. Voor de A-candidaten waren deze voor stelkunde onderscheidenlijk 5,16; 5,33; 5,41; voor meetkunde 5,04; 5,38, 5,25. Voor de B-candidaten: voor stelkunde 5,07; 5,16; 4,80; voor meetkunde 5,46; 5,20; 5,60; voor trigonometrie en analytische meetkunde 5,03; 5,00; 4,50. Ofschoon uit deze gemiddelden verbetering voor enkele onderdeelen blijkt, is het resultaat nog verre van bevredigend. Van de 212 A-candidaten, die ditmaal examen in stelkunde aflegden, konden 30 zelfs het praedicaat 4 niet bereiken; van de 213 in meetkunde geëxamineerde A's 27. Voor de B-candidaten bedroeg het aantal cijfers beneden 4 bij stelkunde 6 op de 38, bij meetkunde 4 op de 34, bij trigonometrie en analytische meetkunde 9 op de 38.

In vele gevallen toonde de candidaat geen helder begrip te hebben van de door hem gebruikte termen. Zoo was het begrip „reëel getal" velen onduidelijk. Op de vraag, voor welke functies de reststelling geldt, volgde dikwijls het antwoord: „voor geheele rationeele functies", zonder dat men kon uitleggen wat dit voor functies zijn. Het verdient aanbeveling, de reststelling te bewijzen door gebruik te maken van de merkwaardige quotiënten; langs dezen weg levert het bewijs minder moeilijkheden. Ook dient men zich meer te oefenen in het oplossen van opgaven over ongelijkheden; hierbij wordt zóó dikwijls bezinning geëischt, dat het automatische werk, dat de stelkunde soms meebrengt, volledig wordt gecompenseerd.

De beteekenis van den term „absolute waarde" bleek herhaaldelijk geheel onbekend, zoodat men onoverkomelijke moeilijkheden ondervond bij het oplossen van het vraagstuk: voor welke reëele

waarden van x zal $\left|\frac{x-2}{x-1}\right| > 1000$ zijn? (Wat deze verticale strepen dan beteekenen, dient men ook te weten!)

De schrijfwijze $f(x)$ wordt nog steeds door velen niet begrepen. Het behoeft dan geen verbazing te wekken, dat verschillende candidaten in bijv. $f_1 (a+1) = f_2 (a+1)$ beide leden „deelen door $a+1$".

Niet zelden worden op elementaire vragen de meest grillige antwoorden gegeven. Men weet niet precies, wanneer een product nul of een quotiënt nul is, waarom $\frac{0}{0}$ geen en $\frac{0}{6}$ wèl beteekenis heeft.

Wanneer gevraagd wordt de uiterste waarden te bepalen van $y = \frac{x^2+2x+1}{x-1}$, dan luidt vaak het antwoord onmiddellijk: „dan moet de discriminant nul zijn". Bij eenig navragen blijkt bedoeld te zijn de discriminant van $x^2 + x\,(2-y) + y + 1 = 0$. Maar de reden hiervan kent men niet, doordat men onbekend is gebleven met de juiste beteekenis van deze vergelijking.

Ook in de meetkunde zijn talrijke candidaten te zeer op automatisch werken ingesteld. Zoo worden doorsneden veelal alleen met behulp van een „grondlijn" geconstrueerd, ook al blijkt dit practisch onmogelijk. Vraagt men een candidaat, op welke stelling een door hem uitgesproken bewering berust, dan blijven de meesten het antwoord schuldig. Geregelde oefening in deze richting is aan te bevelen: immers juist op deze manier wordt de samenhang van de verschillende stellingen onderling en hun verband met de axioma's veel duidelijker.

Menig examinandus is tot het oplossen van een vraagstuk niet in staat, doordat hij geen enkele definitie of eenvoudige stelling behoorlijk kan formuleeren. Hieronder vallen bijvoorbeeld de hoek tusschen twee kruisende lijnen, een lijn evenwijdig met een vlak, evenwijdige vlakken, loodrecht op elkaar staande vlakken e.a. Dat π een irrationeel getal is, behoort men te weten, en ook de benaderde waarde van π in één of meer decimalen. Er waren schattingen, varieerend tusschen 1,4 en 6, zoodat de oppervlakte van een cirkel met straal R geschat werd op 6 R^2.

Ook staan vele candidaten vreemd tegenover het gebruik van meetkundige plaatsen in de stereometrie om de analyse van een ruimteconstructie te geven.

Vraagt men bij het bepalen van een meetkundige plaats in de analytische meetkunde, wat daarmede bedoeld wordt, dan kunnen velen het antwoord niet geven. De bepaling van de meetkundige plaats door eliminatie van één of meer parameters levert dikwijls moeilijkheden op, juist doordat het goede begrip ontbreekt en men dientengevolge niet weet welke vergelijkingen men moet nemen om de gebruikte parameter(s) te elimineeren. En als dan die parameter(s) in één voor het doel geschikte vergelijking ontbreekt, dan beginnen de moeilijkheden pas, want dan kan men wel bijvoorbeeld een parameter oplossen, maar men kan dezen „nergens" substitueeren. Zoo bijv. bij de opgave: Bepaal de meetkundige plaats van de punten P(x, y) als $x = t \cos \varphi + a$, $y = t \sin \varphi + b$, als a, φ en t constant zijn en b veranderlijk is.

In het belang van aanstaande examinandi acht de subcommissie het noodig er nog op te wijzen, dat het haar zeer gewenscht voorkomt dat de candidaten hun schriftelijk werk — in de stelkunde bij het bepalen van uiterste waarden, in de analytische meetkunde bij het bepalen van meetkundige plaatsen — van den noodigen tekst voorzien.

Het resultaat der proef, in 1939 en 1940 genomen met het weglaten van de schriftelijke opgave voor planimetrie, is naar de meening der subcommissie gunstig geweest. Ook ditmaal bleek het zeer wel mogelijk, de kennis der candidaten op dit gebied uitsluitend op grond van mondeling onderzoek te beoordeelen. Wie zich echter voor het examen aanmeldt, behoort te bedenken, dat de eischen voor planimetrie, zooals die bij het mondeling examen moeten worden gesteld, ongewijzigd zijn gebleven.

BOEKBESPREKINGEN.

Beginselen der Nomographie door J. W. N. LE HEUX, hoogleeraar K.M.A.; uitgave Æ. E. Kluwer, Deventer. Prijs *f* 2,20.

Van bovenstaand werkje werd in Februari 1941 een tweede, vermeerderde druk uitgegeven; van de eerste druk onderscheidt deze nieuwe uitgave zich o.a. door de bespreking van functies van meer dan drie veranderlijken, welke bespreking in de eerste druk ontbreekt.

Volgens den schrijver is voor het begrijpen der behandelde stof noodig de gewone kennis der lagere wiskunde en eenig begrip van de beginselen der analytische meetkunde; de gedeelten, waarin de differentiaal- en integraal-rekening wordt toegepast, kunnen worden overgeslagen, zonder dat daardoor het begip van het geheel wordt geschaad. Naar het mij wil voorkomen, zou de waarde van het geheel niet veranderd zijn, indien de toepassingen van genoemde rekening geheel waren weggelaten.

Aan de behandeling van de nomographie zelve laat de schrijver een vrij uitvoerige en volledige geschiedenis van deze tak der wiskunde voorafgegaan; het ware m i. juister geweest dit historisch overzicht aan het slot van het boekje te plaatsen, daar, aangenomen dat het boek regelmatig wordt doorgewerkt, de lezer in dit overzicht tal van uitdrukkingen en begrippen zal aantreffen, die hem alsdan nog totaal vreemd zijn.

Wat de indeeling betreft, lijkt het mij verder niet juist om de behandeling van Cartesische nomogrammen met functie-schalen, waarbij logarithmische schalen, cosinusschalen, log cos-schalen, kwadratische en derdemachtsschalen ter sprake komen, te laten voorafgaan aan de bespreking van functie-schalen. Ware zulks niet geschied, dan zou de leerbaarheid van het eerste gedeelte daardoor stellig gebaat zijn.

Als definitie van de modulus eener schaalverdeeling wordt gegeven: de afstand (in mm of cm), waarop een zeker deelpunt van een schaal verwijderd is van het beginpunt. Dit deelpunt moet zoo gekozen worden, dat in dat punt de functie van het ranggetal $= 1$ is.

Ik vermoed, dat de lezer bij de bestudeering van ettelijke in het boek voorkomende schaal-nomogrammen moeite zal hebben met het vinden van het „beginpunt" en dat hij aan de hand van deze definitie bezwaarlijk de modulus, die bij het ontwerpen der schaal gediend heeft, daaruit zal kunnen terugvinden.

Bij de behandeling van de projectieve schaal, waaraan een afzonderlijke paragraaf wordt gewijd, treft mij de opmerking, dat de formule voor deze schaal

$$x = \mu \frac{a\alpha + b}{c\alpha + d}$$

uit de eerste beginselen der analytische meetkunde kan worden afgeleid.

Nadat van pag. 10 t/m pag. 25 gesproken is over Cartesische nomogrammen wordt de feitelijke behandeling der nomografie, te beginnen bij pag. 26, onderbroken door de bespreking van het gebruik, dat van coördinaat- of functie-papieren in verschillende omstandigheden gemaakt kan worden en van de voordeelen, die dit gebruik biedt boven dat van het gewone millimeter-papier. Als voorbeeld daarvan is o.a. opgenomen een graphiek, waarin de karakteristieke eigenschappen van een gloeilamp zijn uitgebeeld (pag. 32). Ik kan me indenken, dat deze figuur voor den lezer, die op dit gebied niet technisch onderlegd is, vrijwel een raadsel zal blijven.

Par. 11 geeft als toepassing van het gebruik van windroospapier het in teekening brengen van een tabel, die aangeeft de luchtdruk rondom een cilinder, die in een luchtstroom geplaatst is, Eén der conclusies, die uit deze figuur getrokken wordt, zegt, dat aan de achterzijde van den cilinder de omringende luchtstrooming den vorm van den cilinder aanneemt. Plaatst de schrijver zijn lezers hier niet voor een raadsel?

In paragraaf 12 wordt de nomografie weer ter hand genomen en de bespreking van het omzetten van bundelnomogrammen in schaalnomogrammen begonnen. Uitgaande van verschillende bundelnomogrammen wordt telkens besproken welke schaal-nomogram met een gekozen bundel-nomogram correspondeert. Als één der behandelde voorbeelden treffen we hier aan het schaalnomogram voor de derdemachtsvergelijking

$$x^3 + px + q = 0,$$

waarvan de oplossing door middel van een bundelnomogram reeds eerder, en toen vrij uitvoerig, is besproken. Aangezien de behandeling van een zoodanige vergelijking met behulp van een schaalnomogram verre te verkiezen is boven de andere methode, had m.i. deze laatste of weggelaten kunnen worden of met enkele woorden kunnen worden besproken. Alles wat er nu van gezegd wordt is veeleer een meetkundige dan een nomografische uiteenzetting.

Bij de bespreking van het nomogram voor de formule

$$q = \tfrac{1}{2} \delta V^2$$

wordt begonnen met het vaststellen van drie beginwaarden q_0, δ_0 en V_0, voldoende aan de betrekking

$$q_0 = \tfrac{1}{2} \delta_0 V_0^2.$$

De reden, waarom hier met zoodanige vaststelling wordt begonnen, terwijl deze bij alle andere voorbeelden ontbreekt, wordt niet opgegeven; ik vermoed, dat het den lezer ook wel niet gelukken zal deze te vinden.

In de 2de afdeeling worden nomogrammen voor formules met vier of meer veranderlijken besproken. Op verschillende wijzen worden

de twee hulpformules, elk gelijk gesteld aan een in te voeren hulpveranderlijke, in teekening gebracht en verder met elkaar gecombineerd. Tevens wordt behandeld het gebruik van een afleeskruis, dat in de onderhavige gevallen goede diensten kan bewijzen en tot vereenvoudiging van de grafiek kan leiden.

Een honderdtal vraagstukken, geordend naar de verschillende onderdeelen, die in het boek behandeld worden, besluit de hier besproken uitgave.

Gegeven de weinige literatuur, die op het gebied der nomographie in onze taal bestaat, (naast het hier besprokene het boek van den kapt. Nottrot en dat van prof. Van Veen) gaat men onwillekeurig bij de beoordeeling van één dier werken vergelijkingen met de andere maken. Zulks doende ben ik, ik meen dit eerlijk te moeten bekennen, tot de overtuiging gekomen, dat de Inleiding tot de Nomographie van prof. Van Veen verre uitgaat boven het werk van prof. Le Heux en zulks niet in de eerste plaats wat betreft de uitgebreidheid der in die Inleiding behandelde stof, maar wel wat aangaat de manier van behandeling der verschillende onderwerpen en vooral ook de wijze waarop de figuren zijn geconstrueerd, terwijl voor het begrip van beide werken vrijwel dezelfde wiskundige kennis wordt vereischt. P. G. T.

Dr. P. H. VAN LAER, *Historische en Biografische Aantekeningen.* Ontdekkingsgeschiedenis van de chemische elementen en verklaring van hun namen.
J. B. Wolters, Groningen—Batavia, 1941. Prijs *f* 0,50.

Mede op aanraden van verschillende zijden heeft Dr. van Laer dit werkje, oorspronkelijk een artikel in Faraday, in brochure-vorm uitgegeven en daarmede uitstekend werk verricht. De schrijver geeft een kort overzicht van de ontdekkingsgeschiedenis en van het ontstaan der namen van de chemische elementen. Om de beteekenis van dit werkje aan te geven zou men het best kunnen vergelijken met het prachtige werk „Vreemde woorden in de Wiskunde" dat Dr. E. J. Dijksterhuis onze vaklitteratuur schonk, waarbij het ons geenszins denkbeeldig lijkt dat de schrijver door dit werk van Dr. Dijksterhuis gestimuleerd, tot het plan gekomen is soortgelijke arbeid te leveren op het gebied der chemie en een gedeelte van zijn omvangrijk materiaal te publiceeren. Terecht week de schrijver af van zijn oorspronkelijk plan alleen de verklaring van de namen der chemische elementen te geven, daar bij sommige elementen de naam in te nauw verband staat met de ontdekkkingswijze van het element. Dit levert dan, overigens door de aard van de materie, een wezenlijk onderscheid met de werkmethode in boven aangehaald werk.

Het wil ons voorkomen dat een uitgebreide kring lezers, physici en chemici, vooral ook studeerenden, profijt van dit werkje kan hebben. Wij zouden er ook de aandacht op willen vestigen dat het goede diensten zou kunnen bewijzen bij het doceeren van de chemie aan onze scholen voor middelbaar en voorbereidend hooger onderwijs,

waarom wij dan ook leeraren ten sterkste aanraden van dit werkje kennis te nemen.

Wij spreken tenslotte onze waardeering uit voor het werk van den schrijver en hopen, dat het hem gegeven moge zijn zijn werk in deze richting, toegepast op de physica en de cosmografie, te kunnen voltooien met hetzelfde succes. Dr. H. A. Gribnau.

Twee Nederlandsche figuren uit de zestiende en zeventiende eeuw; Simon Stevin, door E. J. DIJKSTERHUIS; Isaac Beeckman, door C. DE WAARD. — Den Haag, M. Nijhoff, *f* 1,—.

Deze overdruk uit de „Archives" van Teyler's Museum bevat twee zeer belangwekkende en mooie voordrachten, gehouden in Januari 1941 in Teylers Stichting te Haarlem.

In de eerste schetst Dijksterhuis de historische beteekenis van Stevin; hij doet dit op deze wijze, dat hij in het eerste deel van zijn voordracht een overzicht van Stevin's werk geeft, terwijl in het tweede gedeelte dieper wordt ingegaan op enkele stukken uit het omvangrijke oeuvre van den belangrijken Hollandsen wiskundige.

Met de „Tafelen van Interest" van 1582 begint Stevin's wetenschappelijke productie. Rentetafels werden tot Stevin's tijd toe geheim gehouden; Stevin merkt op, dat de „kennisse deser tafelen voor den ghenen diese veel van doen heeft, ... een zaecke van grooter consequentien <is>" en dat ze „secreet te houden.... eenichsins een argument < schijnt > van meerder liefde tot profijt dan tot conste." Vandaar zijn uitgave. — In 1585 (wij slaan de Problemata Geometrica van '83 hier over) drie werken van Stevin's hand: de Dialectike ofte Bewijsconst, de Thiende en l'Arithmétique. Het eerste is een leerboek der klassieke logica, waarin Stevin een groot aantal termen, die alleen in het Latijn bestonden, door een kernachtig Nederlands aequivalent vervangt. De Thiende is de aanleiding geweest, waarop Stevin's faam als uitvinder der decimale breuken berust. Dr. Dijksterhuis laat zien, dat deze roem niet geheel gemotiveerd is; o a. kent Stevin nog niet de decimaal-komma. — Het grootste der drie werken, l'Arithmétique, behandelt de rekenkunde en de algebra; door de wijze, waarop Stevin de dingen behandelt, draagt hij echter onmiskenbaar bij tot de ontwikkeling der Wiskunde. Aan het voorbeeld der vierkantsvergelijking wordt dit nader toegelicht.

In 1586 bereikt Stevin's wetenschappelijke productie een hoogtepunt; dan verschijnen: de Beginselen der Weeghconst, de Weeghdaet, en De Beginselen des Waterwichts. Het eerste bevat de theorie van de hefboom en de bepaling van zwaartepunten; in de Weeghdaet worden de gevonden regels op verschillende werktuigen toegepast; het laatstgenoemde werk bevat hydrostatische onderzoekingen.

Na de Appendice Algébrique van 1594 volgen in het begin der 17e eeuw de Wisconstighe ghedachtenissen, bevattende de stof, waarin Stevin zijn leerling Prins Maurits had onderwezen. Het werk bestaat uit vijf stukken: Het Weereltschrift, de Meetdaet, de Weeghconst, de Deursichtighe en de Ghemengde Stoffen. Het eerste stuk bevat ten eerste de „driehouckhandel" (vlakke en sferische trigonometrie en

sferische astronomie), verder het „eertclootschrift" (geologische bebespiegelingen, een verhandeling over de hoogte van de dampkring, een over de „havenvinding", de theorie van eb en vloed); ten derde een deel getiteld „van den Hemelloop", gewijd aan de theorie der bewegingen van de „Zeven dwaelders". Eerst draagt Stevin de theorie van Ptolemaeus voor, daarna met grote overtuiging die van Coppernicus. De inhoud der overige delen spreekt voor zichzelf (deursichtighe = perspectief).

Bedenkt men, dat Stevin nog over tal van andere onderwerpen, meer op de practijk gericht, heeft geschreven (Sterctebouwing, Castrametatio, Spilsluijsen, Molens, Singconst bijv.), dan krijgt men een sterke indruk van Stevin's veelzijdige belangstelling

In het tweede deel van zijn voordracht behandelt Dr. Dijksterhuis enkele delen van Stevin's werk wat uitvoeriger. Hij heeft daartoe enkele onderzoekingen uit „de Weeghconst" en „het Waterwicht" uitgekozen, en toont aan, dat Stevin, voortbouwend op het werk van Aristoteles, er naar gestreefd heeft, de statica op eigen axiomata of althans op niet expliciet geformuleerde algemeen-natuurwetenschappelijke inzichten op te bouwen. De bekende afleiding van de componente van het gewicht van een op een hellend vlak geplaatst lichaam in de richting van de helling wordt aan een uitvoerige kritiek onderworpen, waaruit men kan zien, hoe grote moeilijkheden liggen opgesloten in allerlei zaken, die *wij* geneigd zijn als de gewoonste ter wereld te beschouwen, en hoeveel finesses bij een snelle, moderne, behandeling van deze stof verloren kunnen gaan. — Stevin's bewijs van de wet van Archimedes wordt uitvoerig besproken; op het verschil tussen dit bewijs en het veelal aan Stevin toegeschreven bewijs met behulp van de krachten, die de omringende vloeistof uitoefent, (uit de tegenw. natuurkundeleerboeken) wordt gewezen.

De tweede voordracht schetst het leven en het werken van Isaac Beeckman, een merkwaardige figuur, al is hij veel minder algemeen bekend dan Stevin. In 1588 te Turnhout geboren, gaat Beeckman in 1607 te Leiden theologie studeren. Toen hij wegens godsdienstige meningsverschillen geen predikantsplaats kon krijgen, werd hij kaarsen- en pompmaker te Zierikzee. In 1616 deed hij zijn zaak aan kant en ging medicijnen studeren, deels te Middelburg, deels te Veere. In 1618 promoveerde Beeckman te Caen tot doctor medicinae. Evenals Stevin richtte Beeckman zijn belangstelling op de meest verschillende takken van wetenschap: theologie, logica, muziektheorie, schei- en natuurkunde, wiskunde, sterrekunde, medicijnen. Over zijn ideeën op deze gebieden, die dikwijls origineel waren, worden wij door den heer de Waard uitvoerig en op zeer onderhoudende en duidelijke wijze ingelicht.

Beide voordrachten tonen weer zeer duidelijk aan, hoe nuttig de kennis van de historie van hun vak voor de beoefenaars der wis- en natuurkundige wetenschappen is. Wij kunnen de lezing aan alle docenten van harte aanbevelen. C. de Jong.

Dr. P. MOLENBROEK, *Leerboek der Stereometrie*, negende druk, herzien door P. WIJDENES. P. Noordhoff N.V., Groningen—Batavia 1941. 368 bldz., *f* 7,25*.

De inhoud van de 9e druk van dit algemeen bekende leerboek wijkt slechts op ondergeschikte punten af van die van de vorige druk. Toch moet deze druk als een nieuw boek beschouwd worden, omdat in de wijze, waarop de theorie behandeld is, een grote vooruitgang wat strengheid en nauwkeurigheid betreft, opgemerkt kan worden.

De heer Wijdenes is een van die benijdenswaardige mensen, die ondanks het voortschrijden der jaren de geestkracht behouden om toegankelijk te blijven voor nieuwe denkbeelden en inzichten; met onverflauwde belangstelling volgt hij de ontwikkeling van wetenschappelijke en didactische problemen en — dit is van essentieel belang — weet deze te verwerken en dienstbaar te maken aan een uitgebreide groep van studerenden. In dit streven staan hem als medewerkers ter zijde de heren Harlaar en Herreilers, die ook nu weer, blijkens een mededeling in het voorbericht een belangrijk aandeel in de totstandkoming van de nieuwe druk gehad hebben. Het resultaat van de samenwerking is een boek, dat van de eerste tot de laatste bladzijde getuigenis aflegt van de grote bekwaamheid en de uitgebreide kennis van de bewerkers.

Het is een bizonder genoegen om de door en door bekende bewijzen, die men geregeld op de school moet voordragen, nog eens in dit boek na te lezen; het is leerzaam om daarbij op te merken, hoeveel in onze schoolboeken is weggelaten, zonder dat daarvoor didactische noodzaak aanwezig is, en vooral, hoe vaak de dingen daarbij slordig en zelfs verkeerd worden voorgesteld, zogenaamd om de theorie gemakkelijker te maken.

Hoewel een belangrijke hoeveelheid stof verwerkt is en de meeste bewijzen gedetailleerd gegeven worden, is er in de behandeling toch geen sprake van de bekende „Gründlichkeit" van de Duitse leerboeken met soortgelijke strekking, die weliswaar niet zelden imponeert, maar toch vaak vermoeiend werkt. Anderzijds vermijden de bewerkers de tegenovergestelde fout van de Franse leerboeken die, zonder twijfel, door hun élégance en klaarheid zeer boeiend kunnen zijn, maar in vele gevallen van wege een meer of minder uitgesproken gemis aan degelijkheid en betrouwbaarheid den lezer onbevredigd laten.

Het boek kan eigenlijk niet met buitenlandse worden vergeleken. Het bezit een eigen karakter, het is — men zal mij de gemeenplaats moeten vergeven — door en door Nederlands: degelijk en toch sierlijk, betrouwbaar maar niet zwaar op de hand, kortom het bezit eigenschappen die de lectuur, ook voor den kenner, tot een steeds terugkerend genoegen maakt.

Het zal niet nodig zijn de inhoudsopgave weer te geven; men kan daarover door het prospectus ingelicht worden. Ik geef er de voorkeur aan enkele bizonderheden naar voren te brengen om daarmee de betekenis van het boek enigszins te doen uitkomen.

Het boek is verdeeld in vier afdelingen, die door herhalingsopgaven van elkaar gescheiden zijn. In de eerste afdeling vindt men een

voorbeeldige behandeling van de fundamentele eigenschappen betreffende de onderlinge ligging van rechten en vlakken, zoals die in de schoolboeken — zij het in de regel minder uitgebreid — aangetroffen kan worden.

De tweede afdeling is gewijd aan de meetkundige plaatsen van punten en rechten, de eerste beginselen van de bol, de drie- en veelvlakshoeken. Tevens zijn de hoofdzaken van de projectieve terminologie vermeld — daarmee wordt natuurlijk de grens, die in de schoolwiskunde gesteld is, overschreden — zodat voor sommige stellingen (zoals de stelling van Desargues) een eenvoudiger formulering met vermijding van onderscheidingen van verschillende gevallen mogelijk wordt.

In de derde afdeling komen de veelvlakkige lichamen ter sprake. Een lichaam wordt hier gedefinieerd als een samenhangend en zich niet naar het oneindige uitstrekkend deel van de ruimte tezamen met de begrenzing daarvan. De bewerkers hebben ingezien, dat bij deze opzet van de definitie niet nagelaten mag worden het begrip „deel van de ruimte" behoorlijk te definiëren. Zij kwamen daarbij voor moeilijkheden te staan, want de opstelling van een nauwkeurige definitie van dit begrip, die zo goed mogelijk de aanschouwelijke inhoud ervan karakteriseert, is een probleem, waarvan de oplossing niet voor de hand ligt, omdat men eigenlijk buiten de sfeer van de klassieke stereometrie komt. Hierbij moet de leer van de puntverzamelingen te hulp geroepen worden, hetgeen de bewerkers ook doen, maar door een listige formulering weten zij de terminologie uit die theorie te vermijden.

Hun definitie komt hierop neer — en nu gebruik ik met opzet wel de terminologie van de theorie der puntverzamelingen — dat zij onder een deel van de ruimte verstaan een verzameling L van punten met de eigenschap, dat de inwendige punten van de verzameling in de verzameling dicht liggen, terwijl hetzelfde geldt voor de verzameling L' der niet tot L behorende punten, d.w.z. de inwendige punten van L' liggen in L' dicht.

De begrenzing van L wordt gedefinieerd als de verzameling der tot L behorende verdichtingspunten van L' tezamen met de tot L' behorende verdichtingspunten van L. Op deze wijze worden de veelal intuïtief aanvaarde begrippen logisch gefundeerd.

Vermelding verdient voorts een gedetailleerde bespreking van het begrip „verplaatsing" en de ontbinding van een verplaatsing in spiegelingen. Enig inzicht in deze zaken kan een grote steun geven bij de studie van bepaalde onderwerpen uit de hogere meetkunde.

Uit een origineel en bizonder aardig bewijs van de polyederstelling van Euler blijkt, dat de bewerkers in staat zijn om ook in uitvoerig onderzochte gebieden nog iets nieuws te vinden. Het bedoelde bewijs is in dit tijdschrift reeds gepubliceerd (Euclides **17** (1941), 228—231).

Het bewijs is daarom zo aardig, omdat het met geringe hulpmiddelen het doel weet te bereiken, terwijl het mij gebleken is, dat de gedachtengang bij het bewijs van de analoge stelling in de meerdimensionale meetkunde, de z.g. stelling van Schäfli, eveneens bruikbaar is. Dit is belangrijk, want van deze laatste stelling zijn er,

voor zover ik weet, slechts weinig eenvoudige bewijzen bekend. De inhoudstheorie wordt uitvoerig en grondig behandeld; het existentiebewijs voor de inhoud van polyeders ontbreekt niet.

De afdeling wordt besloten met enige stellingen uit de z.g. nieuwere meetkunde van het viervlak; men kan hier bijvoorbeeld leren, wat bij een viervlak het analogon is van de rechte van Euler in een driehoek en welke figuur in de ruimte met de cirkel van Feuerbach overeenkomt.

De vierde afdeling begint met de behandeling van de gebogen oppervlakken. Ook hier hebben de bewerkers het zich niet gemakkelijk gemaakt en hebben zij getracht de begrippen „oppervlak" en „kromme" precies te definiëren. Hierbij treden meer moeilijkheden op dan bij de definitie van lichaam. Men kan gerust zeggen, dat deze kwesties ver buiten het bereik van de elementaire stereometrie liggen en ik begrijp niet goed, waarom de bewerkers er aan hebben vastgehouden deze begrippen in hun algemeenheid in te voeren. Immers *gebruiken* doen zij ze vrijwel niet, want alleen de cirkel en de daarmee te definiëren oppervlakken spelen in het verdere deel van de theorie een rol.

Beschouwingen als de onderhavige zouden zeer wel op hun plaats zijn in een breed opgezet leerboek over Beschrijvende Meetkunde. Natuurlijk kan men tegenwerpen, dat het niet hindert om ook in een elementair leerboek eens een uitzicht op hogere gebieden te krijgen, en in het algemeen *is* dat ook niet erg, integendeel, maar hier bevinden we ons in een gebied, waar zeer veel omzichtigheid geboden is en de bewerkers zijn er dan ook niet in geslaagd om alle klippen te omzeilen. Zo is het bijvoorbeeld met de door hen gegeven definitie van kromme niet mogelijk te bewijzen, dat de vereniging van twee krommen weer een kromme is. Een moderne definitie, die dit en andere bezwaren ondervangt (afkomstig van K. Menger) luidt dan ook anders dan de door de bewerkers opgestelde, hoewel uiterlijk enige overeenkomst is op te merken.

Bij de oppervlakte- en inhoudstheorie van cylinder, kegel en bol zijn gebaande wegen gevolgd. Melding wordt gemaakt van de stellingen van Guldin en bizondere gevallen daarvan worden bewezen. In dit onderdeel treft men verder een uitstekende behandeling aan van de elementaire meetkunde op het boloppervlak. Vooral hier geven de zeer fraaie tekeningen bij de bestudering van de theorie een grote steun. Als toepassing wordt nogmaals de polyederstelling van Euler bewezen. Ook de nieuwere bolmeetkunde komt ter sprake, terwijl de afdeling besloten wordt met een uitgebreid hoofdstuk over inversie.

In de vraagstukken zijn nog talrijke brokken interessante theorie verwerkt, zodat aan den lezer ruimschoots gelegenheid tot zelfwerkzaamheid geboden wordt.

Een uitvoerig register vergemakkelijkt het naslaan en verhoogt de bruikbaarheid van het boek als handboek. De uiterlijke verzorging is, men verwacht het trouwens al niet meer anders van P. Noordhoff N.V., voorbeeldig.

Samenvattend kan gezegd worden dat het Leerboek der Stereometrie met de 8ste druk van het Leerboek der Vlakke Meetkunde

van denzelfden schrijver een imposant geheel vormt en aanbevolen kan worden aan een ieder, die met het geven van onderwijs in de wiskunde belast is. J. C. H. Gerretsen.

Dr. Joh. H. Wansink, *Reken- en Stelkunde voor het Middelbaar en Voorbereidend Hooger Onderwijs.* Deel III. Groningen-Batavia, J. B. Wolters' U.M. 1941. 219 bladz., prijs *f* 2,35, geb. *f* 2,75.

Het derde en laatste deel van Dr. Wansink's leerboek der Reken- en Stelkunde bevat de volgende onderwerpen: de reststelling; limieten van varianten, limieten van functies en continuiteit, differentiaalrekening (kinematische inleiding en algemeene behandeling); integraalrekening; irrationale vergelijkingen, exponentiëele en logarithmische vergelijkingen en stelsels niet-lineaire vergelijkingen met twee of meer onbekenden; graphische voorstelling van gebroken functies; het getalbegrip (reëele getallen en complexe getallen). Bij deze korte inhoudsopgave dient te worden vermeld, dat de differentiaalrekening de behandeling van de rationale en goniometrische functies omvat, en dat bovendien het theorema van de samengestelde functie is opgenomen; natuurlijk komen de gebruikelijke meetkundige toepassingen ter sprake. Het hoofdstuk over het getalbegrip bevat eene overzichtelijke, schoon hier en daar wel wat korte, herhaling van de eigenschappen der reëele getallen, met aan het slot eene uiteenzetting der bezwaren tegen invoering van een getal oneindig, gevolgd door eene theorie der complexe getallen, met toepassing op vierkantsworteltrekking en oplossing van vierkantsvergelijkingen in het complexe-getallengebied. Vóór bldz. 159 van deel III worden uitsluitend reëele getallen besproken; de behandeling van het reëele-getallengebied wordt nergens onderbroken door beschouwingen over de complexe getallen.

De theorie staat in dit leerboek veel sterker op den voorgrond dan in oudere werken het geval is. Dit neemt niet weg, dat het boek talrijke vraagstukken bevat, zoodat het zelfs als vraagstukkenverzameling te gebruiken zou zijn. De theorie is zeer grondig behandeld, de beschouwingen gaan dieper dan in de meeste schoolboeken; het komt mij voor, dat het werk daardoor hooge eischen stelt, zoowel aan den leeraar als aan den leerling. Maar de moeite, aan de bestudeering besteed, wordt beloond door het verkrijgen van een behoorlijk inzicht in den samenhang der reken- en stelkundige eigenschappen.

De moeite, die het schrijven van een schoolboek kost, stijgt snel met de beoogde exactheid en strengheid. Daaruit volgt, dat, wie zooveel werk op zich neemt als de heer Wansink heeft gedaan, en dat tot een zoo goed einde heeft gebracht, recht heeft op opbouwende critiek. Als zoodanig beschouwe men de volgende opmerkingen.

De bewijzen van de stellingen $\lim a_n - \lim b_n = \lim (a_n - b_n)$ en $\lim a_n : \lim b_n = \lim (a_n : b_n)$ mits $\lim b_n \neq 0$ zijn onjuist; het bestaan van $\lim (a_n - b_n)$ en $\lim (a_n : b_n)$ is namelijk zonder bewijs verondersteld. De stelling, dat een variant geen twee verschillende limieten kan hebben, is te belangrijk om als vraagstuk te worden afgedaan; zij is eene belangrijke theoriestelling, die herhaaldelijk wordt

toegepast. Vooral in dezen vorm: als twee varianten term voor term overeenstemmen of slechts in een eindig aantal termen verschillen, en de eerste heeft eene limiet, dan heeft de tweede die zelfde limiet. Bij het bewijs der stelling $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$ wordt gebruik gemaakt van de nergens bewezen continuiteit van den cosinus, en van de hoogst belangrijke, maar nergens bewezen of zelfs maar genoemde stelling, dat uit

$$a_n \leqq x_n \leqq b_n \qquad \lim a_n = \lim b_n = L$$

volgt $\lim x_n = L$, of eigenlijk van de analoge stelling omtrent limietwaarden van functies: uit $f_1(x) \leq f_2(x) \leq f_3(x)$ en $\lim\limits_{x \to a} f_1(x) = \lim\limits_{x \to a} f_3(x) = L$ volgt $\lim\limits_{x \to a} f_2(x) = L$. Bij het bewijs van stelling III op bldz. 61 had vermeld kunnen worden, dat y' eenwaardig ondersteld is. In § 55 heb ik tot mijne groote verbazing de behandeling der zoo belangrijke exponentieele ongelijkheidsopgaven gemist. In de definitie van „asymptoot" had er op gewezen kunnen worden, dat de eigenschap onafhankelijk is van het punt, van waar men de afstanden telt. De behandeling van raaklijnen aan hyperbolen (bldz. 122) is niet gebaseerd op de vroeger gegeven raaklijndefinitie (bldz. 43). In § 75 had de schrijver bij de definities van $b \times a$ en van a^b het geval $b = 1$ niet mogen vergeten.

Ik zou nog enkele kleinigheden kunnen opnoemen, maar laat dit opzettelijk na, om niet den indruk te wekken, dat het boek vol fouten staat. Ieder, die wel eens zelf een boek geschreven heeft of getracht heeft te schrijven, weet, dat men zelfs met inspanning van alle krachten het insluipen van foutjes en vergissingen niet voorkomen kan, te minder naarmate men hoogere eischen aan zijn werk stelt. En de aanmerkingen, die ik op het bewonderenswaardige werk van Dr. Wansink te maken heb, zijn noch van ernstigen aard, noch groot in aantal. Boeken van eene allure als deze Reken- en Stelkunde verschijnen niet dikwijls.

J. H. S.

Dr J. B. A. A. HAMERS C. ss. R. *Brekingsindex van gecomprimeerde gassen,* 145 blz. Centrale Drukkerij N.V. — Nijmegen, 1941.

Dit boek, dat als dissertatie heeft gediend, geeft een overzicht van het experimenteel werk, dat door den auteur is verricht met het doel den invloed van temperatuur en druk op de optische eigenschappen van een stof te onderzoeken, om zoo iets te weten te komen over de structuur der atomen en moleculen van de betreffende stof en over de wisselwerking van de moleculen. Als object van onderzoek werd koolzuur gekozen, omdat over dit gas reeds veel gegevens beschikbaar waren, terwijl het verder groote dichtheidsvariaties toelaat in geheel verschillende drukgebieden.

In hoofdstuk I geeft de auteur een uitvoerig overzicht over optische methoden en haar bruikbaarheid bij hooge drukken en temperaturen. De meeste van deze blijken voor hooge drukken ongeschikt te zijn. De methode, die de meeste waarborgen voor betrouwbaarheid biedt,

is die, welke gebruik maakt van een interferentieverschijnsel, en waarbij het optisch apparaat is ingebouwd in het hooge-druk-gedeelte. Deze methode werd door den auteur gebruikt.

Hoofdstuk II geeft een samenvatting van vroeger gepubliceerde metingen, waarbij de resultaten in overzichtelijke tabellen zijn weergegeven. Tevens worden hier de formules besproken, die door verschillende physici zijn afgeleid voor de afhankelijkheid van den brekingsindex van druk en temperatuur.

De hoofdstukken III en IV geven een duidelijke beschrijving van de gevolgde methode en van het gebruikte instrumentarium, hoofdstuk V van de metingen en van de berekening der resultaten. Metingen van de brekingsindices werden verricht tot drukkingen van 2400 atmosfeer en bij temperaturen van 20, 32, 50 en 100° C.

De resultaten worden in hoofdstuk VI besproken aan de hand van de formule van Lorentz-Lorenz, terwijl het zevende en laatste hoofdstuk na een theoretische inleiding een discussie der resultaten geeft. Eerst wordt een afleiding gegeven van de formules van Lorentz-Lorenz en van Clausius-Mosotti. Daarna komt de invloed van intermoleculaire effecten ter sprake, waarbij de theorieën van Kirkwood en van Mueller behandeld worden. De besproken theorieën worden vergeleken met de resultaten. Er zijn aanwijzingen, dat de Lorentz-Lorenz-constante bij lagere dichtheden door een maximum gaat en daarna bij toenemende dichtheden gaan dalen. Bij overgang van gas- naar vloeistoftoestand is er geen discontinuiteit. Bij constante dichtheid en druk is er bij toenemende temperatuur een toename van deze constante. Vergelijking van de experimenteele gegevens met de theorieën van Kirkwood en van Mueller toont aan, dat deze de waargenomen effecten hoogstens qualitatief verklaren, zoodat behalve intermoleculaire wisselwerkingen ook wel veranderingen in de moleculen zelf invloed zullen hebben.

Uit den aard der zaak heeft dit boek in zijn geheel alleen waarde voor degenen, die zich voor dit speciaal onderwerp interesseeren. Zooals uit de gegeven inhoudsopgave blijkt, zijn er echter verschillende hoofdstukken, die ook een breedere belangstelling verdienen. Ik denk hier b.v. aan de beschrijving der optische meetmethodes en de theoretische beschouwingen. De behandeling der stof munt uit door duidelijkheid en overzichtelijkheid.

Dr. P. H. van Laer.